Преобразования Лоренца в математике

Преобразование Лоренца представляет собой естественное обобщение понятия ортогонального преобразования (то есть преобразования, сохраняющего скалярное произведение векторов) с евклидовых на псевдоевклидовы пространства. Различие между ними состоит в том, что скалярное произведение предполагается не положительно определённым, а знакопеременным и невырожденным (так называемое индефинитное скалярное произведение).

Определение

Преобразование Лоренца (лоренцево преобразование) псевдоевклидова векторного пространства L — это линейное преобразование $A\colon L \to L$, сохраняющее индефинитное скалярное произведение векторов. Это означает, что для любых двух векторов $x, y \in L$ выполняется равенство $\langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, y\rangle$,

где треугольными скобками обозначено индефинитное скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ в псевдоевклидовом пространстве L.

Аналогично, преобразование Лоренца (лоренцево преобразование) псевдоевклидова аффинного пространства — это аффинное преобразование, сохраняющее расстояние между точками этого пространства (это расстояние определяется как длина вектора, соединяющего данные точки, с помощью индефинитного скалярного произведения).

Общие свойства

- Так как любое аффинное преобразование является композицией параллельного переноса (очевидным образом, сохраняющего расстояние между точками) и преобразования, имеющего неподвижную точку, то группа преобразований Лоренца аффинного пространства (группа Пуанкаре) получается из группы преобразований Лоренца векторного пространства (группа Лоренца) такой же размерности путём добавления к ней всевозможных параллельных переносов.
- Если в псевдоевклидовом векторном пространстве L выбран некоторый базис $e_1, \dots, e_n$, то для индефинитного скалярного произведения $\langle x, y\rangle$ определена матрица Грама G. Тогда матрица A преобразования Лоренца удовлетворяет соотношению

$$A^T G A = G, \qquad (*)$$

И обратно, любая матрица A, удовлетворяющая соотношению $(*)$, является матрицей преобразования Лоренца. Всегда можно выбрать базис $e_1, \dots, e_n$ таким образом, что индефинитное скалярное произведение имеет вид

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \dots + x_k y_k - x_{k+1} y_{k+1} - \dots - x_n y_n,$$

и в равенстве $(*)$ матрица G — диагональная с элементами 1 (первые k) и -1 (последние $n-k$).